Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого Институт прикладной математики и механики

Кафедра «Прикладная математика»

Курсовая работа по дисциплине

"Методы оптимизации"

Тема: общий сравнительный анализ эффективности применения метода одномерной минимизации для выбора шага в методе наискорейшего спуска

Выполнили студенты гр.3630102/70301

Камянский Д.В.

Лебедев К.С.

Иванкин А.С.

Ли Жуйци

Руководитель

доцент, к.ф.-м.н. Родионова Е.A.

Санкт-Петербург 2020

[1. Постановка задачи курсовой работы 3](#_Toc41684888)

[2. Описание методов одномерной минимизации 3](#_Toc41684889)

[a) Постановка задачи одномерной минимизации 3](#_Toc41684890)

[b) Метод золотого сечения 4](#_Toc41684891)

[c) Метод Фибоначчи 4](#_Toc41684892)

[3. Метод наискорейшего спуска 5](#_Toc41684893)

[4. Результаты и выводы 7](#_Toc41684894)

[5. Список литературы 8](#_Toc41684895)

# Постановка задачи курсовой работы

Целью курсовой работы является оценка и сравнение методов Золотого сечения и Фибоначчи по их вычислительной эффективности для выбора шага в методе наискорейшего спуска.

Достижение указанной цели осуществлялось путем решения следующих основных задач:

1. Выбор функции, для которой выполняются условия применимости методов, и точки начального приближения.

2. Подсчет параметров: число итераций основного алгоритма; общее число обращений к функции, общее количество арифметических операций.

3. Анализ полученных результатов.

# Описание методов одномерной минимизации

# Постановка задачи одномерной минимизации

f: R R

Найти c точностью

Методы одномерной минимизации основаны на построении последовательности вложенных отрезков [], сходящихся к искомой точке .

# Метод золотого сечения

В данном методе строится последовательность вложенных отрезков,

осуществляющих золотое сечение.

На каждом шаге алгоритма рассматривается три отрезка [ *,* ]*,* [ *,*]*,* [ *,* ] где *αn* = *bn −*

Исходя из ограничений, наложенных на целевую функцию, определяется

следующее приближение [*an*+1*, bn*+1] и переопределяются *αn*+1*, βn*+1

*an*+1 = *αn, αn*+1 = *βn, βn*+1 = *bn*+1 *−* (*αn*+1 *− an*+1)*, bn*+1 = *bn* if *f* (*αn*) *> f* (*βn*)

*an*+1 = *an, αn*+1 = *an*+1 + (*bn*+1 *− βn*+1)*, βn*+1 = *αn, bn*+1 = *βn* if *f* (*αn*) *≤ f* (*βn*)

Можно выделить два важных свойства метода золотого сечения:

1:

2: На каждом шаге алгоритма достаточно пересчитать значение *f* (*x*) лишь в одной точке, *αn или βn*

# Метод Фибоначчи

Метод Фибоначчи является оптимальным последовательным методом, т.е. методом, обеспечивающим максимальное гарантированное сокращение отрезка локализации при заданном числе N вычислений функции. Этот метод основан на использовании чисел Фибоначчи , задаваемых рекуррентной формулой

Метод Фибоначчи состоит из N-1 шагов. Очередной (k+1)-й шаг выполняют здесь аналогично (k+1)-й итерации метода деления отрезка пополам. В отличие от него точки находят по формулам

Новый отрезок локализации определяют по тому же правилу：

Если

Если [[[1]](#endnote-1)]

# Метод наискорейшего спуска

**Начальный этап**

Выберем параметр. характеризующий условие окончание вычислений, начальное приближение. Положим k= 0 и перейдем к основному этапу

**Основной этап**

Шаг 1: вычисляем V/(т).

Шаг 2: определяем , исходя из условия .

Шаг 3: полагаем , заменясм К на К +1 и переходим к шагу 1.

Условие окончания вычислений

**Теорема 1**  Для ограниченной снизу функции *f* (*x*),градиент которой удовлетворяет условию Липшица с постоянной L:

при любых , . значение параметра градиентном методе выбираются по формуле; последовательность (х}. определяемая процессом (), такова, что неравенство (< eps) при выполнено при любом малом положительном eps для любого начального приближения

**Теорема 2**  Если Функция f(x) удовлетворяет Теореме 1 при условии определения параметра по формуле ( в оптимальном градиентном методе, то

**Теорема 3**  Пусть функция f(x) , причем квадратичная форма . связанная с матрицей Гессе вторых производных Н(), такова, что при любых т f(x)

Пусть последовательность, определяемая процессом ,Тогда для любой начальной точки то последовательность при сходится к единственной точке минимума , cо скоростью, определяемое следующим образом:

, 0 < q < 1 [[[2]](#endnote-2)]

**В данной работе будем рассматривать функцию:**

**с начальным приближением**

**Вывод оценок для теоремы 3:**

=

4 +

# Результаты и выводы

Метод Золотого сечения

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 1e-1 | 4 | 48 | 140 |
| 1e-3 | 6 | 72 | 210 |
| 1e-5 | 7 | 84 | 245 |
| 1e-7 | 8 | 96 | 280 |
| 1e-10 | 10 | 120 | 350 |

Метод Фибоначчи

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 1e-1 | 4 | 60 | 236 |
| 1e-3 | 6 | 75 | 295 |
| 1e-5 | 6 | 90 | 354 |
| 1e-7 | 7 | 105 | 413 |
| 1e-10 | 10 | 120 | 472 |

– число итераций основного алгоритма

общее число обращений к функции

общее количество арифметических операций

**Вывод**: из полученных результатов следует, что для данной задачи МЗС показывает себя эффективнее МФ: в МЗС не превышает в МФ, а для невысоких € значительно ниже; в МЗС для всех рассмотренных € значительно ниже, чем в МФ. Но для высоких точностей і, ниже в МФ по сравнению с МЗС, что делает его предпочтительнее при высокой сложности вычислений в основном алгоритме (напр., вычисление градиента).

# Список литературы

1. Курс лекций по предмету Методы оптимизации, Родионова Е.А. 2020.
2. Петухов Л.В., Серёгин Г.А., Родионова Е.А. Методы оптимизации. Задачи выпуклого программирования: Учеб.пособие - СПб. : Изд-во Политехнического ун-та, 2014.
3. Лыткина Л.И., Сафонов К.В., Хоролич Г.Б. Методы оптимизации и вариационное исчисление: Учеб. пособие. Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. – Красноярск, 2012. – 116 с.
4. Амосов А.А Вычислительные методы для инженеров: Учеб.пособие / Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В.М.: Высш. шк.,1994. - 544 с.:ил.

1. Амосов А.А Вычислительные методы для инженеров §9.3 [↑](#endnote-ref-1)
2. Все теоремы и алгоритмы взяты из лекций по предмету Методы оптимизации Родионовой Е.А. [↑](#endnote-ref-2)